Ebene algebraische Kurve

Prof. Dr. Duco van Straten
Universität Mainz

Sommersemester 2016

Chapter 1

Einführung

1.1 Einführung

Ebene algebraische Kurven sind Lösungsmengen einer Polynomgleichung $f(x,y) = 0$ in zwei Variablen. Sie dürfen lediglich durch algebraische Operationen (d.h. $+, -, *, /$) definiert werden, daher der Name algebraische Kurven. Das Wort *Ebene* bezieht sich auf die Darstellungsart. Es handelt sich um Polynomgleichungen mit zwei Variablen x und y. Die gezeichneten Kurven liegen somit in einer Ebene.

Beispiel 1.1 *Der Einheitskreis*
Die wohl bekannteste algebraische Kurve ist der Kreis mit der Gleichung:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

Bei dieser Kurve werden jedem x-Wert zwei y-Werte und jedem y-Wert zwei x-Werte zugeordnet, was nach einer elementaren Umformung ersichtlich ist. Aus $x^2 + y^2 = 1$ folgt direkt $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Es handelt sich um folgende Kurve:

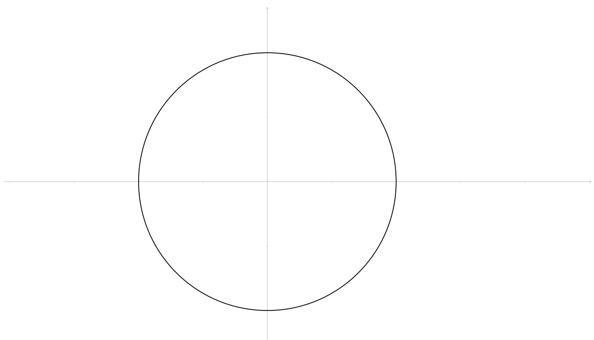

Figure 1.1: Der Einheitskreis

Beispiel 1.2 *Die "Schulkurven"*

Die in der Schule behandelten Kurven, sogenannten "Schulkurven" sind spezielle Kurven. Sie haben die Form $y = g(x)$ was gleich bedeutend ist mit $f(x, y) = y - g(x)$. Folgende Grafik zeigt ein Beispiel einer solche Kurve:

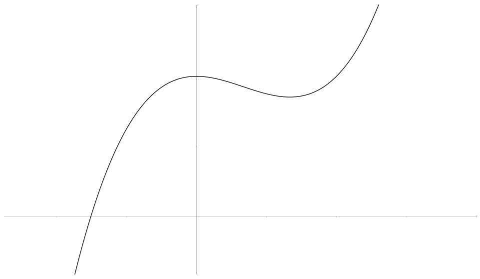

Figure 1.2: Eine "Schulkurve"

Beispiel 1.3 *Weitere Beispiele*

- *Lemniskate von* BERNOULLI *mit der Form:*

$$(x^2 + y^2)^2 + y^2 - x^2 = 0$$

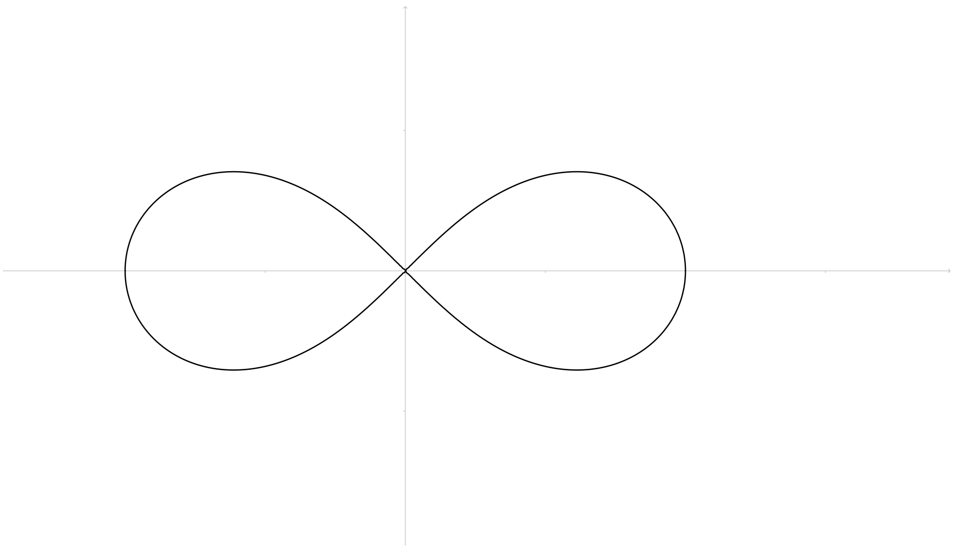

Figure 1.3: Die Lemniskate von BERNOULLI

- *"Herz" mit der Form:*

$$(x^2 + y^2)^2 + y^3 - x^2 = 0$$

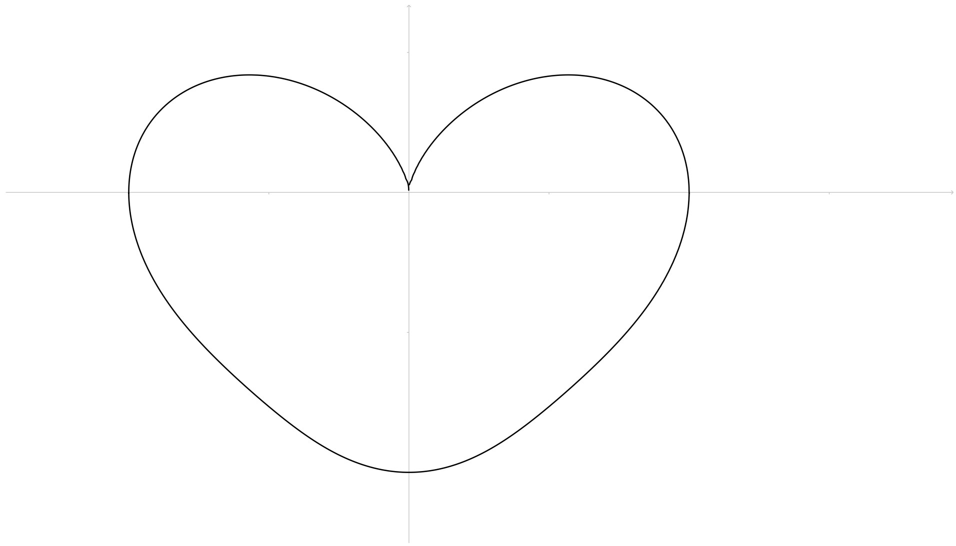

Figure 1.4: Die Herzkurve

Diese Kurven haben besondere Punkte, sogenannte Singularitäten.Betrachten wir uns diese besonderen Punkte genauer.

- $A_1 : 0 = y^2 - y^2 = (y + x)(x - y)$ als den "Knotenpunkt" der Lemniskate. Dieser Knotenpunkt stellt bei ihr einen besonderen Fall dar, da sich in diesem Punkt die Kurve selbst schneidet.

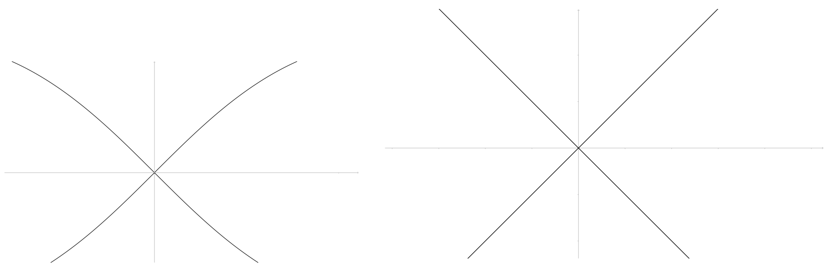

Figure 1.5: Knotenpunkt der Lemniskate (links) und A_1 (rechts)

- $A_2 : 0 = y^3 - x^2$ als die "Kuspe" des Herzens

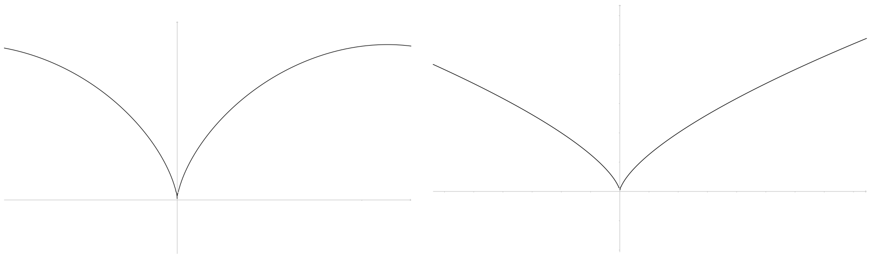

Figure 1.6: Kuspe der Herzkurve (links) und A_2 (rechts)

Einen speziellen Typen von Kurven bilden die parametrisierten Kurven. Sie haben die Form:

$$x = x(t) \qquad y = y(t)$$

mit rationalen Funktionen. Eliminiert man bei parametrisierten Kurven die Variable t, so erhält man eine Gleichung der Form $f(x, y) = 0$

Beispiel 1.4

$$x(t) = t^3, y(t) = t^2$$

Es ist schnell ersichtlich, dass die Gleichung $x^2 - y^3 = 0$ gilt. Es handelt sich um die kuspitale Kurve 1.6.

Grundfragen, die in dieser Veranstaltung beantwortet werden sind zum einen:

- Welche Kurven besitzen eine (rationale) Parametrisierung?
- Wie findet man solche Parametrisierungen?

Satz 1.5 *Wir werden jeder Kurve C eine Zahl $g(C)$ zuordnen. $g(C)$ heißt Geschlecht von C. Die Zahl $g(c) \in \mathbb{N}_0$ hängt von dem Grad der Kurve und von der Singularität von C ab.Eine Kurve C ist somit rational parametrisierbar, wenn $g(C) = 0$ ist.*

Das Geschlecht der Lemniskate $g(Lemniskate) = 0$
Das Geschlecht des Herzens $g(Herz) = 2$
Somit ist die Lemniskate parametrisierbar, das Herz hingegen nicht.

1.2 Kreise und Geraden

In diesem Abschnitt werden zunächst einige bekannte Aussagen über Geraden und Kreise getroffen.

- Hier wird der Satz von PAPPOS gezeigt. Ausgangslage sind zwei Geraden, in diesem Beispiel Gerade d und e mit jeweils drei Punkten A, B, C bzw. A', B', C'. Verbindet man den Punkt A mit B' und C', Punkt B mit A' und C' sowie Punkt C mit A' und B'. Dann existiert genau eine Verbindungsgerade m durch die Schnittpunkte.

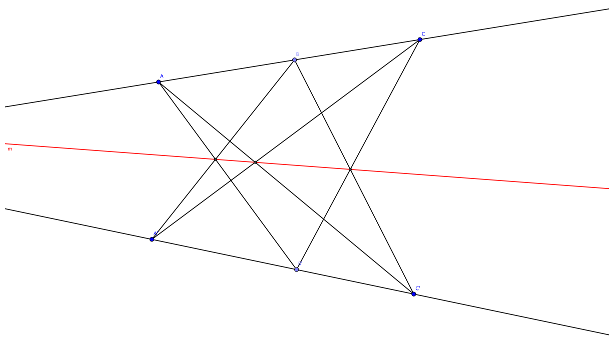

Figure 1.7: Satz von PAPPOS

- In folgendem Bild zu sehen ist ein ARBELOS.Unter einer ARBELOS versteht man eine spezielle, von drei (Halb)-Kreisen begrenzte, Figur. Besonders ist die Tatsache, dass die roten Kreise K_1 und K_2 flächengleich sind.Sie haben somit den gleichen Radius. Man nennt sie *Zwillingskreise von* ARCHIMEDES.

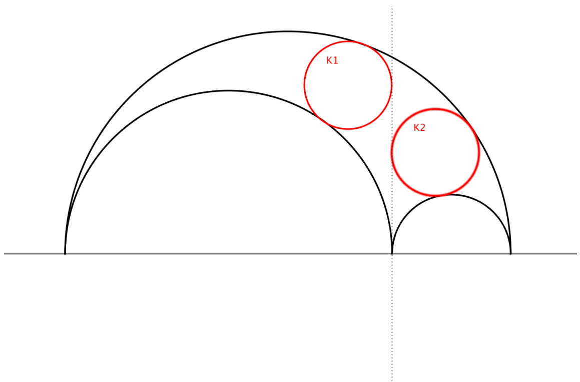

Figure 1.8: Figur von ARBELOS

- Eine weitere Aussage ist der Satz von Johnsen. Er besagt, dass drei Kreise mit dem gleichen Radius einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen. Dieser Schnittpunkt ist zugleich Mittelpunkt eines Kreises, der je durch den Schnittpunkt zweier Kreise verläuft, wie folgendes Bild verdeutlicht.

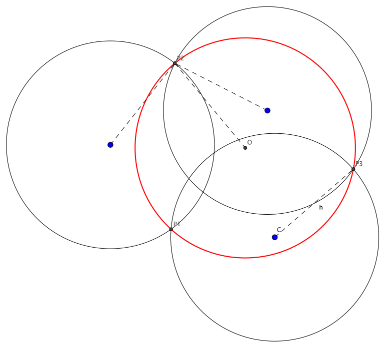

Figure 1.9: Schnittpunkt dreier Kreise

- Die vorerst letzte Aussage über Geraden und Kreise geht auf Pascal zurück. Es ist ähnlich zu dem Satz von Pappos, mit dem Unterschied, dass sich die Punkte auf einem Kreis befinden. Wieder verbindet man den Punkt A mit B' und C', Punkt B mit A' und C' und Punkt C mit A' und B'.Auch in diesem Fall existiert eine Verbindungsgerade h, die durch die gemeinsamen Schnittpunkte verläuft.

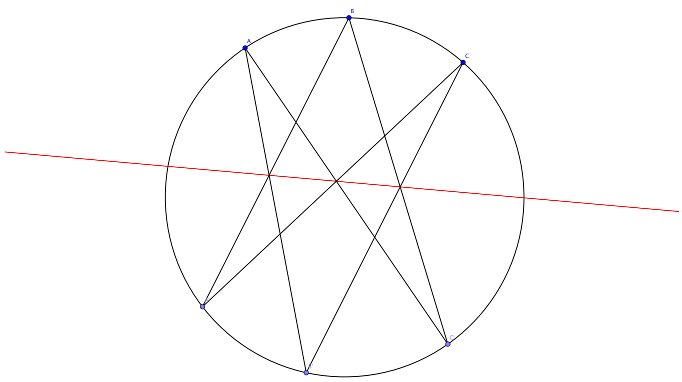

Figure 1.10: Satz von Pappos am Kreis

1.3 Inversion am Kreis

Die Inversion am Kreis, oder auch Kreisspiegelung, ist eine Abbildung, die das Innere eines Kreises mit dem Äußeren vertauscht.

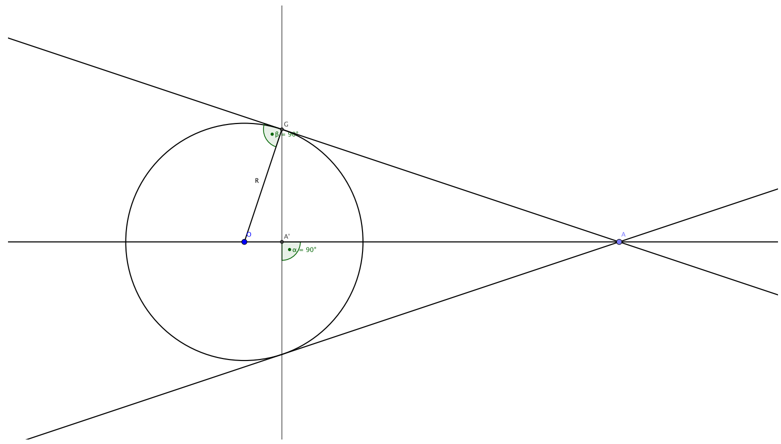

Figure 1.11: Inversion am Kreis

In obiger Skizze gilt der Zusammenhang:

$$\frac{|OA'|}{R} = \frac{R}{|OA|} \quad \text{bzw.} \quad |OA'||OA| = R^2$$

Dies funktioniert für alle Punkte außerhalb des Kreises.

- Kreis in Polarkoordinaten mit $r = Dcos(\varphi)$

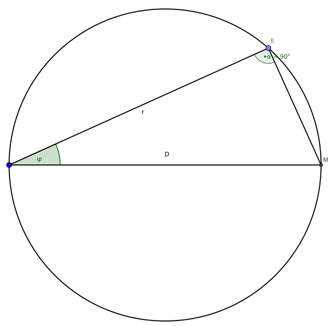

Figure 1.12: Kreis in Polarkoordinaten

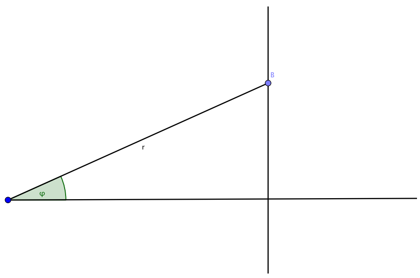

Figure 1.13: Gerade in Polarkoordinaten

- Gerade in Polarkoordinaten mit $L = rcos(\varphi)$ bzw. $r = \dfrac{L}{cos(\varphi)}$

Als Fazit folgt, dass bei der Inversion am Kreis eine Gerade (mit Abstand L) zu einem Kreis (mit Durchmesser D) wird. Es gilt:

$$DL = R^2 \quad \text{bzw.} \quad D = \frac{R^2}{L}$$

.

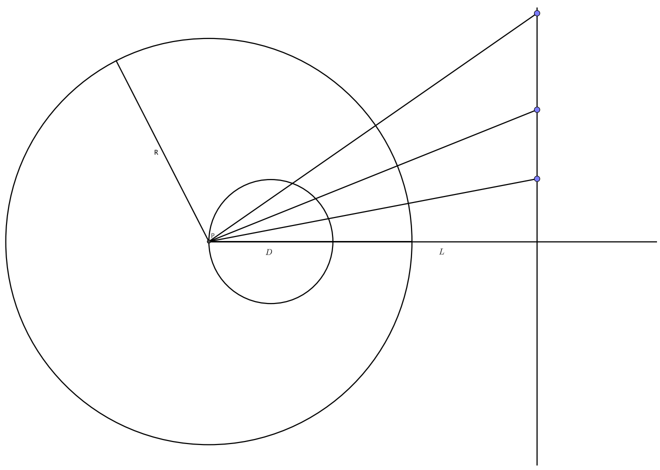

Figure 1.14: Fazit zu Inversion am Kreis

1.4 Parametrisierung des Kreises

1.4.1 Spezialfall aus 1.3

Betrachten wir nun den Spezialfall $D = L = R$ aus 1.14. Das bedeutet, dass der Punkt A auf dem Kreis liegt. Diesen Spezialfall wollen wir nun genau so parametrisieren, wie bereits in 1.3.

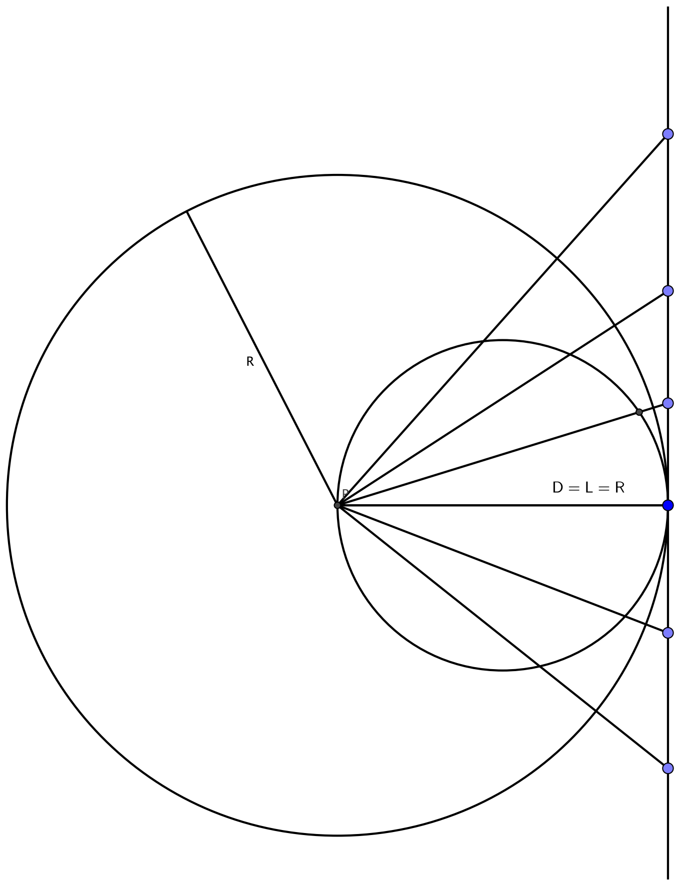

Figure 1.15: Spezialfall $D = L = R$

Denkt man sich hierfür in der vergrößerten Aufnahme den Ursprung des Koordinatensystems in dem Mittelpunkt, so gilt die Beziehung $\frac{y}{x+1} = \frac{t}{2} =: s$ Daraus folgt $y = s(x+1)$ mit der Kreisgleichung $y^2 = 1-x^2 = (1-x)(1+x)$. Setzt man nun y ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} s^2(1+x)^2 &= (1-x)(1+x) \\ s^2(1+x) &= (1-x) \\ s^2 + s^2 x &= 1-x \\ x &= \frac{1-s^2}{1+s^2} \end{aligned}$$

Für y folgt nach Einsetzten $y = \frac{2s}{1+s^2}$.
Man hat folgende Parametrisierung erhalten

$$x(s) = \frac{1-s^2}{1+s^2}, \quad y(s) = \frac{2s}{1+s^2}$$

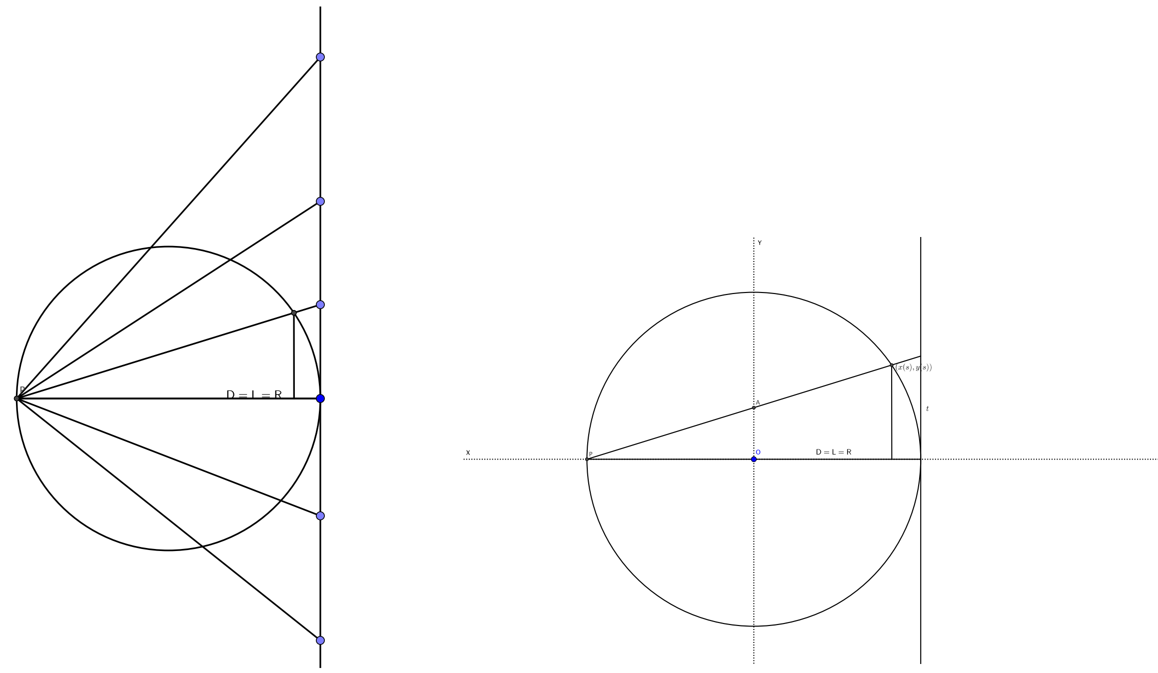

Figure 1.16: Spezialfall 1.15 vergrößert

mit $x(s)^2 + y(s)^2 = 1$. Es handelt sich somit um den Einheitskreis.

1.4.2 Anwendung

Ein Anwendungsbeispiel für solche Parametrisierung ist, wie gesagt, das Lösen von komplizierten Integralen. Betrachten wir als Beispiel das Integral:

$$\int \frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{3 + x\sqrt{1 - x^2}} dx$$

. Mit der Parametrisierung $y = \sqrt{1-x^2}$ folgt das neue Integral

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+y}{3+xy}dx &= \int (\frac{y^2-3}{y(xy+3)} + \frac{1}{y})dx \\
&= (y - \frac{3}{y}) \int \frac{1}{xy+3}dx + \int \frac{1}{y}dx \qquad \text{(substituiere } u = xy+3, du = ydx) \\
&= (1 - \frac{3}{y^2}) \int \frac{1}{u}du + \frac{1}{y} \int 1dx \\
&= (1 - \frac{3}{y^2})log(u) + \frac{x}{y} \\
&= \frac{(y^2-3)log(xy+3)+xy}{y^2} \qquad \text{(mit} \quad y = \sqrt{1-x^2}) \\
&= \frac{(1-x^2-3)log(x\sqrt{1-x^2}+3)+x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)}
\end{aligned}$$

1.5 Kegelschnitte

Betrachte zunächst einen Kegel, mit einem weiteren gespiegelten Kegel an der Spitze, einen sogenannten *Doppelkegel*. Durch das Schneiden in verschiedenen Schnittwinkeln einer Ebene mit diesem Doppelkegel entstehen *Kegelschnitte*. Je nach Winkel erhält man eine Ellipse, Hyperbel, Parabel oder ein Geradenpaar.

- Für Ellipsen gilt:

$$|PF_1| + |PF_2| = const \qquad \text{bzw.} \qquad (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{a})^2 = 1.$$

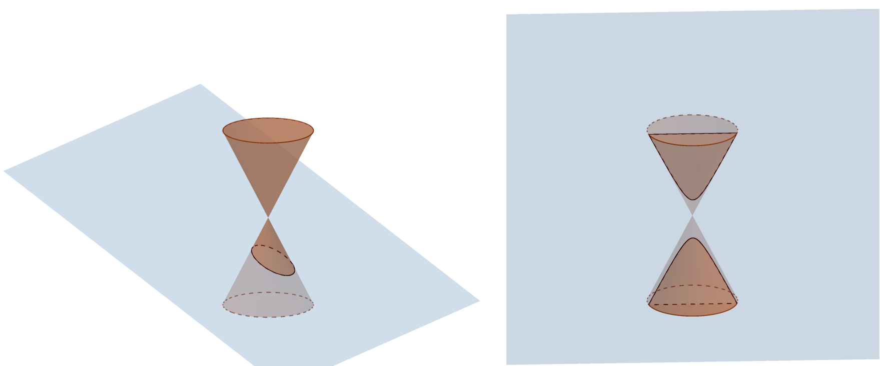

Figure 1.17: Ellipse und Hyperbel

- Für Hyperbeln gilt:

$$(\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{a})^2 = 1$$

- Für Parabeln gilt $y = ax^2$, wenn sie den Scheitel in $(0, 0)$ hat.
- Für ein sich in $(0, 0)$ schneidendes Geradenpaar gilt $a^2x^2 - y^2 = 0$ $a \neq 0$.

1.5.1 Satz von Dandelin

Der Satz von Dandelin zeigt, dass der Zusammenhang

$$|PF_1| + |PF_2| = const$$

direkt an einem Kegelschnitt zu sehen ist. Man kann einen Kegelschnitt so durch eine geeignete Fadenkonstruktion erhalten. Betrachte zur Veranschaulichung folgende Zeichnung, bei der die Summe der Abstände zu den Brennpunkten immer konstant ist.

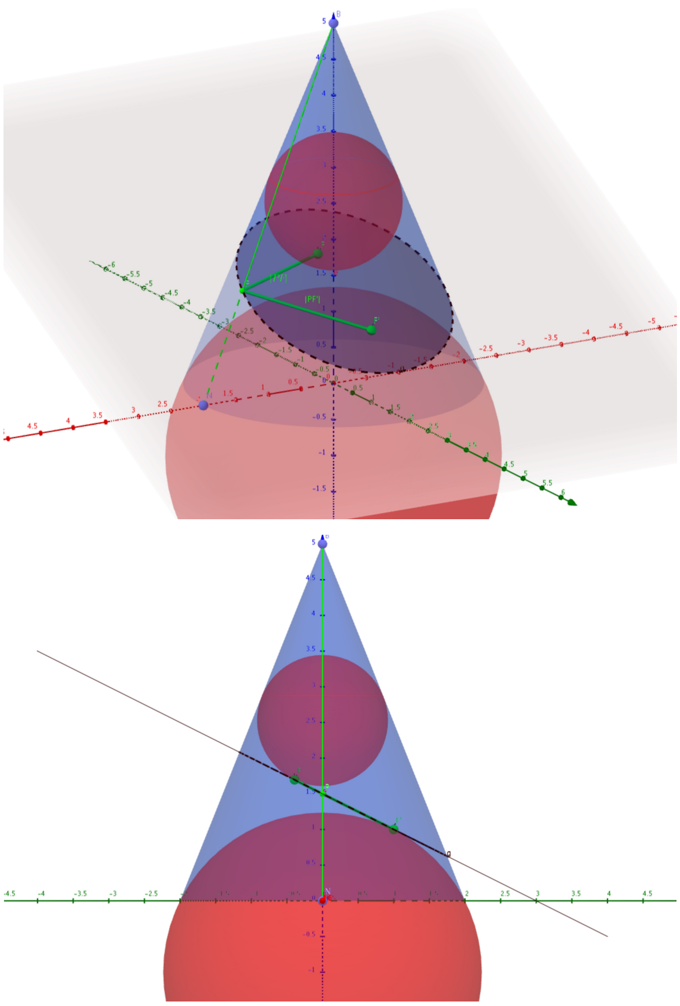

Figure 1.18: Kegelschnitt des Satzes von Dandelin

1.6 Zissoide von Diokles

Die Zissoide von Diokles ist eine besondere Kurve. Mit ihr kann eins der drei antiken griechischen Probleme gelöst werden, die Verdopplung des Würfelvolumens. Sie gelingt nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal. Um das Volumen eines Würfels zu verdoppeln, muss die Strecke $\sqrt[3]{2}$ konstruiert werden. Ein Würfel mit Kantenlänge a hat ein Volumen von $V_1 = a^3$. Verdoppelt man dieses Volumen, so erhält man $V_2 = 2a^3$ und muss $x = \sqrt[3]{2a^3}$ konstruieren . In kommendem Falle handelt es sich um den Einheitswürfel mit $a = 1$.
Folgendes Bild verdeutlicht die Ausgangssituation der Zissoide. Man erkennt gut den Zusammenhang, dass die Anzahl Geraden von 0 an den Kreis, eine Kurve entstehen lassen (grün).

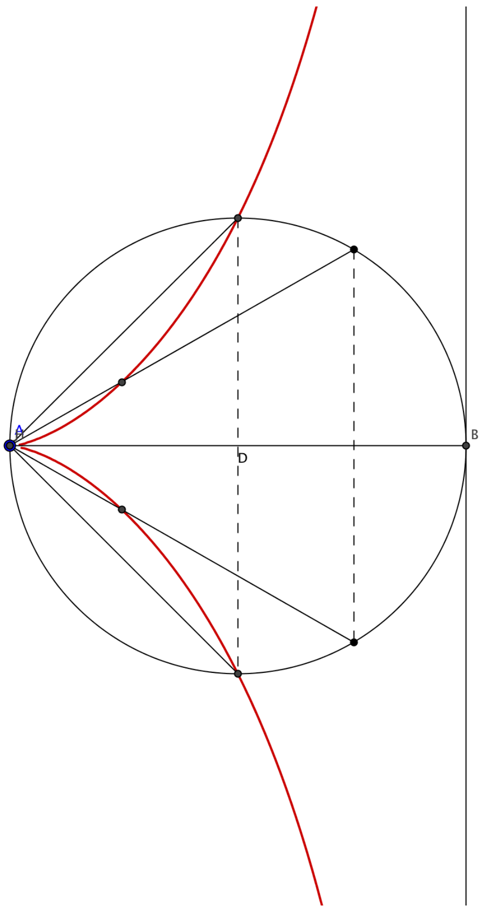

Figure 1.19: Zissoide von DIOKLES

Diese Kurve ist bereits bekannt, es handelt sich um eine Kuspe. Der mathematische Zusammenhang ergibt sich aus:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x(D-x)}}{D-x}$$
$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2(D-y)}{(D-x)^2}$$
$$y^2 = \frac{x^3}{D-x}$$

Es folgt eine kubische Kurve $(D-x)y^2 - x^3 = 0$, die sogenannte *Zissoide von* DIOKLES. Mit dieser Kurve gelingt es Strecken der Länge $\sqrt[3]{2}$ zu konstruieren.
Nun wollen wir eine geeignete Parametrisierung dieser Kurve finden.
Wir wählen $t := \frac{y}{x}$ für y folgt $y = tx$.

Nach einsetzen folgt nun:

$$(D - s)t^2x^2 = x^3$$
$$(D - x)t^2 = x$$

Als finale Parametrisierung erhält man nun:

$$x = \frac{Dt^2}{(1+t^2)}, \quad y = \frac{Dt^3}{(1+t^2)}.$$